АППРОКСИМАЦИЯ ПЕРИОДИЧЕСКОГО СИГНАЛА АВТОМАТИЧЕСКОЙ РЕГУЛИРУЕМОЙ СИСТЕМЫ

Ровенская О. Г., Новиков О. А.

Работа касается вопросов решения и исследования уравнений динамики систем автоматического регулирования. Предложен метод построения спектральной характеристики периодического сигнала на основании разложения в тригонометрический ряд, показаны преимущества применения средних арифметических сумм Фурье в спектральном анализе периодического возмущающего воздействия автоматической регулируемой системы. Работа направлена на расширение направления теории приближения, связанного с асимптотическими случаями, на аналогичные конечномерные задачи, возникающие в теории автоматического регулирования. Спектральные представления периодического сигнала непосредственно опираются на теорию рядов Фурье и интеграла Фурье.

Роботу присвячено питанням розв’язання та дослідження рівнянь динаміки систем автоматичного регулювання. Запропоновано метод побудови спектральної характеристики періодичного сигналу, що базується на розвиненні в тригонометричний ряд, показано переваги використання середніх арифметичних сум Фур’є в спектральному аналізі періодичного збурюючого імпульсу автоматичної регульованої системи. Роботу спрямовано на розповсюдження напрямку теорії наближення, пов'язанного з асимптотичними випадками, на аналогічні скінченновимірні задачі, що виникають у теорії автоматичного регулювання. Спектральні уявлення періодичного сигналу безпосередньо спираються на теорію рядів Фур'є та інтегралу Фур'є.

This work considers solving and study of equations of dynamics of automatic control systems. Is proposed the construction method of spectral characteristic of periodic signal based on expansion in trigonometric series, are presented advantages of use of arithmetic Fourier sums in spectral analysis of periodic disturbing impulse of the automatic controlled system. This work is directed on expansion of direction of the theory of the approach, connected with asymptotic cases on the similar finite-dimensional tasks arising in the theory of automatic control. Spectral representations of periodic signal directly are guided by the theory of ranks of Fourier and Fourier's integral.

Ровенская О. Г. — канд. физ.-мат. наук, доц. каф. ВМ ДГМА
o.rovenskaya@mail.ru

Новиков О. А. — канд. физ.-мат. наук, доц., декан ФМФ ДГПУ

ДГМА – Донбасская государственная машиностроительная академия, г. Краматорск;
ДГПУ – Донбасский государственный педагогический университет, г. Славянск.

УДК 517.5

Ровенская О. Г., Новиков О. А.

АППРОКСИМАЦИЯ ПЕРИОДИЧЕСКОГО СИГНАЛА АВТОМАТИЧЕСКОЙ РЕГУЛИРУЕМОЙ СИСТЕМЫ

С периодическими движениями (колебаниями) приходится иметь дело в самых различных областях знания – в теории упругости, акустике, радиотехнике, электротехнике, в том числе, теории автоматического регулирования, – и всюду простейшими периодическими движениями являются гармонические колебания.

Устройства автоматического регулирования предназначены для изменения управляемого процесса по заранее определённому закону. Производственный процесс, происходящий в регулируемом объекте, характеризуется одной или несколькими величинами. Некоторые из них в ходе процесса должны поддерживаться постоянными, другие изменяться по заданному закону. Эти задачи и выполняют системы автоматического регулирования (САР). Исследование движения систем автоматического регулирования под действием возмущающих сил составляет основной вопрос динамики регулирования. Как известно, задачей всякой системы автоматического регулирования является поддержание равенства между действительным и предписанным значениями регулируемой величины. Изменение регулируемой величины вызывается возмущающими воздействиями, приложенными к системе, которые нарушают соответствие между действительным и установленным значениями этой величины. С другой стороны, задающее или управляющее воздействие регулятора изменяет регулируемую величину таким образом, чтобы действительное значение регулируемой величины приближалось к предписанному.

В теории автоматического регулирования получили широкое распространение частотные методы анализа и синтеза САР. Частотные методы являются весьма удобным инструментом, пригодным для суждения об устойчивости системы, точности ее работы, качества переходных процессов и т.д. Математической основой частотных методов являются спектральные представления сигналов и связанные с этими представлениями частотные характеристики систем. В свою очередь, спектральные представления непосредственно опираются на ту часть математического анализа, в которой рассматривается теория рядов Фурье и интеграла Фурье.

Величина и характер возмущающих воздействий зависит от того технологического процесса, один или несколько параметров которого подлежат автоматическому регулированию. Функция, оказывающая изменение во времени возмущающего воздействия на одно из звеньев регулятора, называется возмущающей функцией. Возмущающую функцию удобно выражать в безразмерных единицах аналогично тому, как это делается в уравнениях малых отклонений, выбрав подходящее базисное значение возмущающего воздействия.

В ряде случаев технологический процесс сопровождается возмущающими воздействиями, повторяющимися через равные промежутки времени. Такой случай имеет всегда место, когда регулируемая среда расходуется периодически равными порциями. На рис. 1 приведены графики периодических возмущающих воздействий.

Для периодических возмущающих воздействий справедлива запись:

$$\begin{cases} f(t) = 0 \text{ при } t < 0, \\ f(t) = f(t+T) \text{ при } t \geq 0 \end{cases}$$

если T – период приложения возмущающего воздействия.

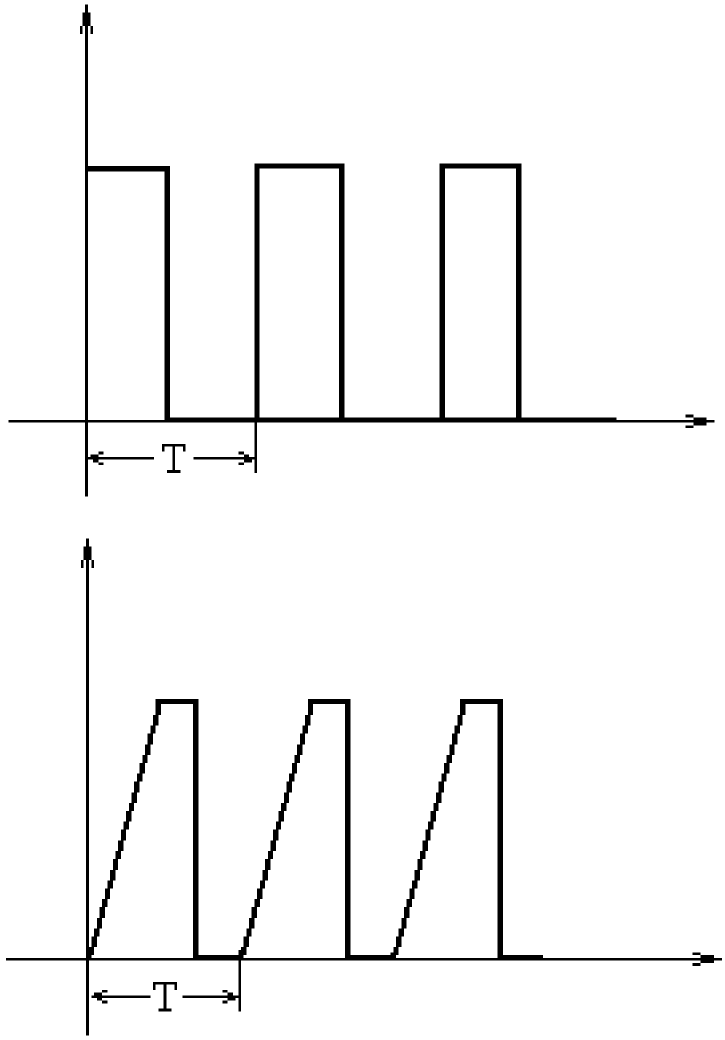


Рис. 1. Графики периодических возмущающих воздействий

Одним из методов решения и исследования уравнений динамики систем автоматического регулирования является метод частотной функции, который нашёл широкое применение при расчётах и проектировании систем автоматического регулирования, особенно в электрических системах. Частотная функция даёт более быстрый способ построения графика переходного процесса, чем другие методы, особенно для систем высокого порядка. Для случаев периодических возмущающих воздействий метод частотной функции быстрее других методов приводит к математическому описанию процесса регулирования.

Метод частотной функции возник на базе теоретических исследований периодических функций в области электротехники и связи и представления их рядами Фурье. Будучи перенесён в теорию регулирования, он оказался весьма плодотворным.

Сущность метода состоит в следующем [1]. Если на входе линейной разомкнутой системы регулирования приложить синусоидальное возмущающее воздействие, то на выходе системы при установившемся режиме мы получим функцию также синусоидальной формы той же частоты, но другой амплитуды и фазы, чем гармоника возмущения.

Представляя воздействие возмущения в виде ряда Фурье и применяя принцип суперпозиции, можно исследовать заданную систему и определить её реакцию на разные виды возмущения, пользуясь отмеченным свойством синусоидального возмущающего воздействия. Этот метод наглядно выявляет характер влияния отдельных параметров системы на переходной процесс и значительно упрощает расчёты. Особенно упрощаются расчёты при периодических возмущающих действиях.

Применение метода частотной функции при произвольном возмущении основывается на двух положениях:

1. Возмущающая функция может быть разложена в гармонический ряд, конечный или бесконечный, дискретный или непрерывный.

2. Выходная функция разомкнутой системы при произвольном возмущающем воздействии на входе определяется как алгебраическая суммам составляющих выходов, вычисленных для отдельных гармоник ряда, в который разложена функция возмущения. Это справедливо только для линейных систем.

Задача разложения функции возмущения в гармонический ряд решается согласно теории рядов Фурье. Функция периодического возмущающего воздействия $\varphi(t)$ отличается от периодической функции тем, что при $t<0$ она везде равна нулю. Поэтому коэффициенты Фурье будут вычисляться для функций $\varphi(t)$ по формулам

$$C_n = \frac{1}{T}\int_0^T \varphi(t) e^{-in\omega_0 t} dt, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

и

$$\varphi(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} C_n e^{in\omega_0 t},$$

где n – порядок высшей гармоники, ω_0 – частота основной гармоники, T – период основной гармоники, равный периоду функции.

Приближение периодических функций частичными суммами ряда Фурье является наиболее простым и естественным примером линейного процесса аппроксимации. Но, как хорошо известно, суммы Фурье заданной функции иногда сходятся к ней очень медленно или вообще расходятся. В связи с этим, значительное количество работ (например, [2–5]) в этом направлении посвящено изучению приближающих свойств других методов приближения, которые порождаются определёнными преобразованиями частичных сумм ряда Фурье и позволяют построить тригонометрические полиномы, которые быстрее сходились бы к заданной функции. Линейные средние арифметические частичных сумм ряда Фурье [5], представляют собой один из таких методов. Более подробно с библиографией по этим вопросам можно ознакомиться, например, в работах [6, 7].

Цель работы – показать преимущества применения средних арифметических сумм Фурье в спектральном анализе периодического возмущающего воздействия автоматической регулируемой системы.

По спектру, в частности, видно из каких нетривиальных гармоник состоит периодический возмущающий сигнал. Для синусоидального возмущения амплитуда представляет собой одно комплексное число, определяемое значением частоты ω. При произвольной периодической возмущающей функции порождаются колебания с дискретным спектром частот. В этом случае представляет интерес графическое изображение модуля амплитуды, которое носит название амплитудно-частотной характеристики сигнала.

Сравним приближение, которое обеспечивают частичные суммы ряда Фурье и их средние арифметические для последовательности возмущающих импульсов, изображённой на рис. 2.

Функция $\varphi(t)$, которая описывает данный сигнал, на периоде может быть представлена таким образом:

$$\varphi(t) = \begin{cases} h - \dfrac{2(h-h_1)}{T}t, & 0 < t \le \dfrac{T}{2}, \\ h_1, & \dfrac{T}{2} \le t < T. \end{cases}$$

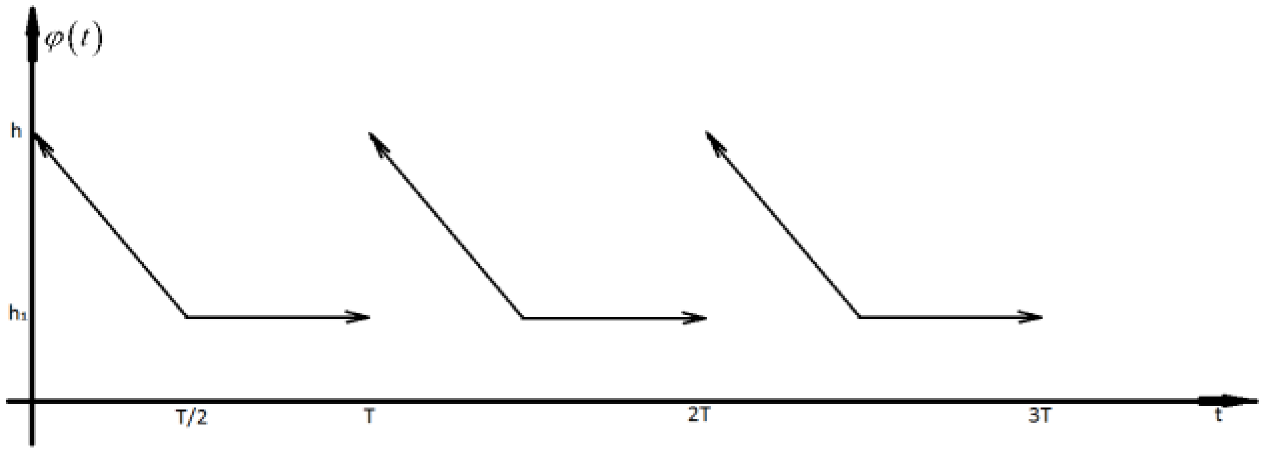


Рис. 2. Периодический возмущающий сигнал

Для упрощения вычислений выполним сдвиг системы координат $t = t_1 + \frac{T}{2}$, тогда

$$\varphi(t_1) = \begin{cases} h_1 - \frac{2(h-h_1)}{T} t_1, & -\frac{T}{2} < t_1 \le 0, \\ h_1, & 0 \le t_1 < \frac{T}{2}. \end{cases}$$

Найдём коэффициенты Фурье

$$a_0 = \frac{h + 3h_1}{2},$$

$$a_n = \begin{cases} 0, & n = 2k, \\ -\frac{2(h-h_1)}{\pi^2 n^2}, & n = 2k-1, \end{cases} \quad k \in \mathrm{N},$$

$$b_n = (-1)^n \frac{h + h_1}{\pi n}.$$

Тогда

$$\varphi(t_1) = \frac{h+3h_1}{4} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(-\frac{2(h-h_1)}{\pi^2 (2k-1)^2} \cos(2k-1)\frac{2\pi}{T} t_1 - \frac{h+h_1}{\pi(2k-1)} \sin(2k-1)\frac{2\pi}{T} t_1 \right) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{h+h_1}{2\pi k} \sin\frac{4\pi k}{T} t_1 .$$

Ряд Фурье исходного сигнала имеет вид

$$\varphi(t) = \frac{h+3h_1}{4} + \sum_{k=1}^{\infty} A_{2k-1} \sin((2k-1)\omega t + \alpha_{2k-1}) + \sum_{k=1}^{\infty} A_{2k} \sin 2k\omega t,$$

где $A_{2k-1} = \frac{h+h_1}{(2k-1)\pi}\sqrt{1 + \frac{4}{(2k-1)^4 \pi^4}\left(\frac{h-h_1}{h+h_1}\right)^2}$ – амплитуда колебаний $(2k-1)$-й гармоники;

$A_{2k} = \frac{h+h_1}{2k\pi}$ – амплитуда колебаний $2k$-й гармоники;

$\alpha_{2k-1} = arctg \dfrac{h-h_1}{h+h_1} \dfrac{2}{(2k-1)\pi}$ – фаза запаздывания $(2k-1)$-й гармоники;

$\omega = \dfrac{2\pi}{T}$ – основная частота.

Построим амплитудно-частотную характеристику сигнала $\varphi(t)$ при числовых значения динамических параметров $h = 5$, $h_1 = 1$, $T = 2\pi$ (рис. 3).

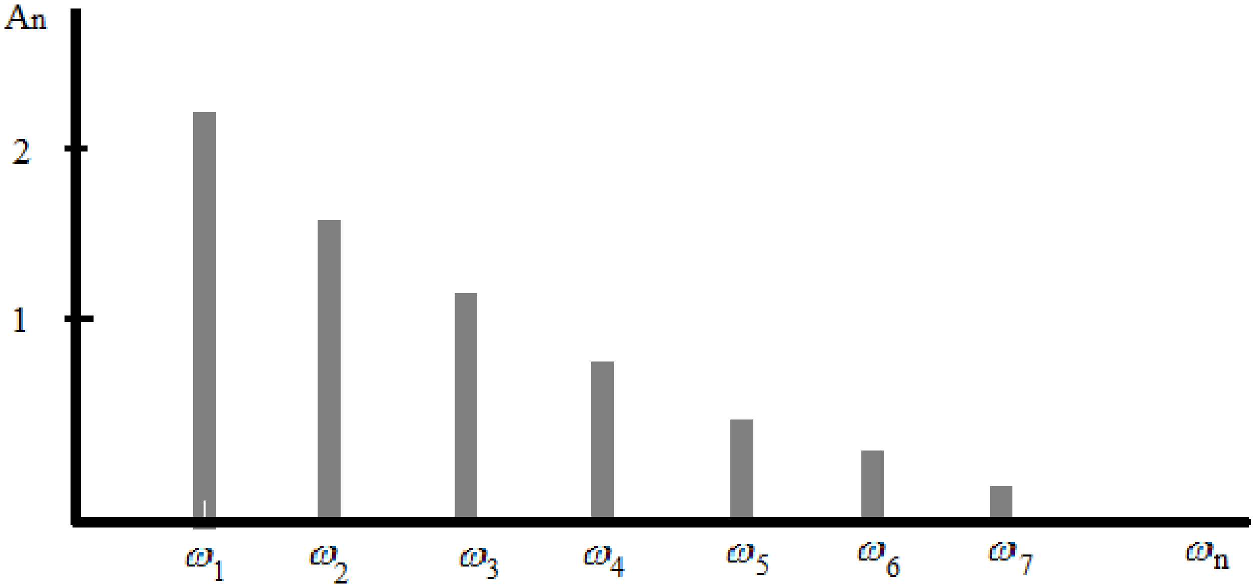


Рис. 3. Амплитудно-частотная характеристика периодического сигнала $\varphi(t)$.

Анализируя полученную амплитудно-частотную характеристику сигнала, можем сделать вывод, что существенными являются первые пять-шесть гармоник ряда. Сравним приближение функции $\varphi(t)$ частичными суммами ряда Фурье $S_n(t)$ и их средними арифметическими, которые задаются следующим соотношением

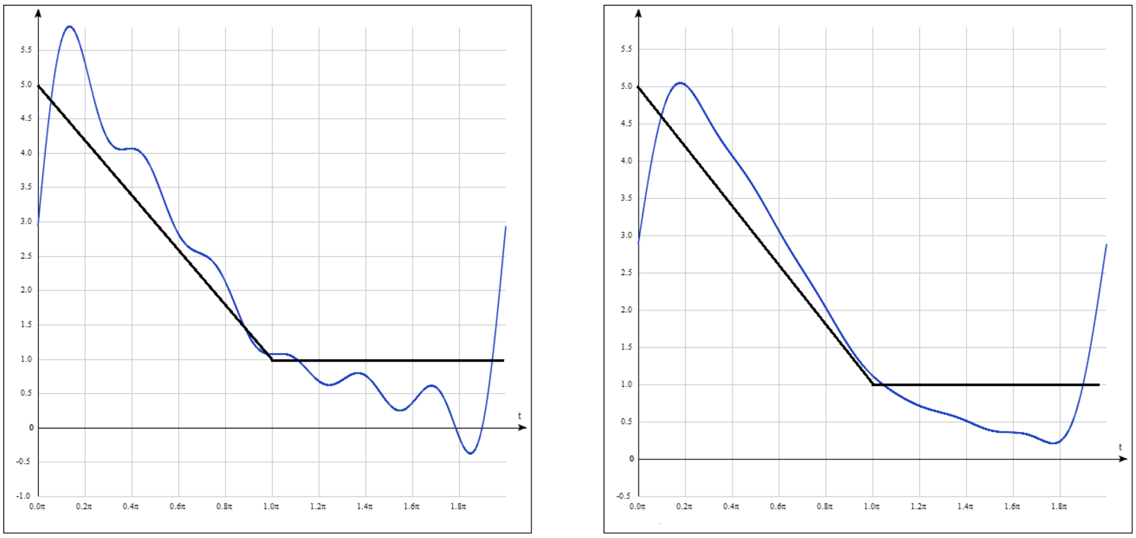
$$\sigma_n(t) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} S_k(t).$$

Для этого запишем тригонометрические полиномы пятого порядка:

$$S_6(t) = 2 + \frac{8}{\pi^2}\cos t + \frac{6}{\pi}\sin t + \frac{3}{\pi}\sin 2t + \frac{8}{9\pi^2}\cos 3t + \frac{2}{\pi}\sin 3t + \frac{3}{2\pi}\sin 4t + \\ + \frac{8}{25\pi^2}\cos 5t + \frac{6}{5\pi}\sin 5t + \frac{1}{\pi}\sin 6t,$$

$$\sigma_6(t) = 2 + \frac{8}{\pi^2}\cos t + \frac{6}{\pi}\sin t + \frac{5}{2\pi}\sin 2t + \frac{16}{27\pi^2}\cos 3t + \frac{4}{3\pi}\sin 3t + \frac{3}{4\pi}\sin 4t + \\ + \frac{8}{75\pi^2}\cos 5t + \frac{2}{5\pi}\sin 5t + \frac{1}{6\pi}\sin 6t.$$

Покажем приближение возмущающей функции $\varphi(t)$ частичными суммами Фурье (рис. 4, а) и их средними арифметическими (рис. 4, б) на одном периоде



а б

Рис. 4. Приближение сигнала $\varphi(t)$ частичными суммами Фурье (а) и их средними арифметическими (б) на одном периоде.

ВЫВОДЫ

Сравнивая приближение, которое обеспечивается частичными суммами ряда Фурье и их средними арифметическими, можно сделать вывод, что полиномы, порождаемые суммированием ряда Фурье, являются эффективным способом приближения и могут использоваться при спектральном анализе периодических возмущающих воздействий в устройствах автоматического регулирования. При этом метод построения указанных полиномов достаточно прост, не требует специальных навыков и поэтому может быть использован также в других областях физики и техники, где имеют место периодические процессы.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дорф Р., Бишоп Р. Современные системы управления / Пер. с англ. Б. И. Копылова. – М. : Лаборатория базовых знаний, 2002. – 832 с.

2. Rukasov V. I. Approximation of the classes of analytical functions by de la Vallee-Poussin sums / V. I. Rukasov, S. O. Chaichenko // Ukr. Math. J. – 2003. – Vol. 55, № 6. – P. 575–590.

3. Ровенская О. Г. Приближение периодических аналитических функций повторными суммами Валле Пуссена / О. Г. Ровенская // Динамические системы. – 2009. – Вып. 27. – С. 81 – 92.

4. Rovenska O. Approximation of classes of analytic functions by repeated arithmetic means of Fourier sums / Rovenska Olga // Computational Methods and Function Theory 2009 : Int. Conf., 8 – 12 June 2009. : Abstr. – Ankara, Turkey, 2009. – P. 51.

5. Новиков О. А. Спектральный анализ периодического сигнала / Новиков О. А., Ровенская О. Г., Обухов А. Н. // Науковий вісник Донбаської державної машинобудівної академії. – 2011. – № 2 (8Е). – С. 119 – 124.

6. Самойленко А. М. Математичні аспекти теорії нелінійних коливань / А. М. Самойленко, Р. І. Петришин. – К. : Наук. думка, – 2004. – 474 с.

7. Степанец А. И. Методы теории приближений: В 2 ч. / Степанец А. И. – К. : Ин-т математики НАН Украины, 2002. –Ч. 1. – 427 с.

Статья поступила в редакцию 17.02.2016 г.